

抽象代数笔记

卓功亦

2025 年 9 月 29 日

由于之前就对抽象代数有一定了解，本笔记不会详细记录陈猛老师上课讲的全部内容，转而挑选那些个人认为重要的做记录

0.1 每周习题

第二周作业：习题 1.3 4, 5, 7, 9 第三周作业：习题 1.4 3, 4, 5 习题 1.5 1, 2, 5, 7

1 群

1.1 群与子群

1.2 对称群

1.2.1 奇偶置换与交错群

σ 为奇（偶）置换 $\Leftrightarrow (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ 为奇（偶）排列

后者即为该序列的逆序数，不难证明：

定理 1.2.1. (1) $\forall \sigma \in S_n, \sigma$ 是奇（偶）置换 $\Leftrightarrow \sigma$ 可表示为奇（偶）数个对换之积

(2) S_n 中奇偶置换各占一半

(3) A_n 为 S_n 中所有偶置换构成的集合，则 $A_n < S_n$

来看一个置换群子群的例子

例 1. 二面体群 $D_n < S_n$ 为正 n 边形全等变换对应置换构成的集合

σ 由边 $\sigma(\overline{12})$ 唯一确定, 即由 $\overline{\sigma(1)\sigma(2)}$ 唯一确定。从而 $|D_n| = 2n$, 注意 D_n 不为 Abel 群。

1.3 陪集、正规子群、商群

1.3.1 陪集

定义 1.3.1. G 为群, $H < G$, 左陪集 $aH := \{ah \mid h \in H\}$ 同理有右陪集。

引理 1.3.1. G 为群, $H < G, a, b \in G$ 则 $aH = bH$ 或 $aH \cap bH = \emptyset$ 且 $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

定义 1.3.2. $G/H^l := \{aH \mid a \in G\}$, 则存在 S 使得 $a, b \in S, a \neq b, aH \neq bH$, 此时 G 关于 H 的左指数定义为 $[G : H]_l = |S|$

同理对右陪集定义

引理 1.3.2. $[G : H]_l = [G : H]_r$

从而我们将左右陪集等同起来, 同时进而右

定理 1.3.1 (lagrange 公式). G 为有限群, $H < G$, 则 $|H| \mid |G|$

推论 1.3.1. $a \in G \Rightarrow \langle a \rangle < G \Rightarrow o(a) \mid |G|$

推论 1.3.2. 若 $|G| = p$, 取 $a \in G, a \neq e$, 则 $o(a) = p$, 从而 G 为 p 阶循环群

定理 1.3.2. G 为群, $H < G, K < G$, 且 H, K 为有限群, $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$, 则

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

证明从 $H \cap K$ 的陪集的观点看不难。

1.3.2 正规子群

接下来的目标是赋予 G/H 自然的群结构

一个自然的想法是 $aH \star bH := (ab)H, eH = H, (aH)^{-1} = a^{-1}H$, 问题是, 这样的结构一定成立吗?

只需要保证的是这个乘法的良定性, 即

$$a_1H = a_2H, b_1H = b_2H \Rightarrow (a_1b_1)H = (a_2b_2)H$$

这就是说 $b_1^{-1}a_1^{-1}a_2b_2 \in H$, 即 $b_1^{-1}(a_1^{-1}a_2)b_1 \in H$, 由任意性得到:

$$\text{该乘法良定} \Leftrightarrow \forall b \in G, h \in H, b^{-1}hb \in H$$

定义 1.3.3. 对群 G , 若 $H < G, \forall b \in G, b^{-1}Hb \subset H$, 则称 H 为 G 的正规子群, 记作 $H \triangleleft G$, 此时由前面的讨论, G/H 为群, 称为商群

例 2. 给一个非正规子群的例子: $G = S_3, H = \{(1), (12)\}, [S_3 : H] = 3$
取 $b = (23)$, 则 $b^{-1}(12)b = (13) \notin H$

定义的验证有时相当繁琐, 我们给出几个等价的命题以帮助我们判断正规子群

定理 1.3.3. 以下几个命题等价:

(1) $\forall x \in G, x^{-1}Hx \subset H$

(2) $\forall x \in G, x^{-1}Hx = H$

(3) $\forall x \in G, H \subset x^{-1}Hx$

(4) $\forall x \in G, xH = Hx$

(5) $\forall x \in G, xH \subset Hx$

(6) $\forall x \in G, Hx \subset xH$

再给一些例子来加深对正规子群的理解

例 3. 若 $[G : H] = 2$, 则 $H \triangleleft G$, 证明应用定理 1.3.3 (4) 即可

一般来说, 任何一个群都有一个自然的正规子群

例 4. 对群 $G, C(G) := \{x \mid \forall g \in G, gx = xg\}$, 称为群 G 的中心, 则 $C(G) \triangleleft G$, 注意中心可能是平凡的

我们也可以对一个子群构造另一个子群, 使原子群是新子群的正规子群

例 5. G 为群, $H < G$, 但不为正规子群, 构造 $N_G(H) := \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H\}$, 则不难证明 $H \triangleleft N_G(H)$ 称为 H 的正规化子, 注意这里正规化子可以是 H

也可以通过研究生成元来构造正规子群

例 6. G 为群, $\emptyset \neq S \subset G$, 若有 $\forall x \in G, s \in S, x^{-1}sx \in S$, 则 $\langle S \rangle \triangleleft G$ 进一步我们考虑一个特殊的子群, 取 $S_0 := \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G\}$, 它满足上述提到的所有要求, 从而 $\langle S_0 \rangle$, 记作 $[G, G]$, 是正规子群。这个子群被叫做换位子群, 在 lie theory 中有许多运用。其核心的性质在于 $G/[G, G]$ 为 abel 群 (直接验证即可), 从而可以简化群结构。更进一步的, 换位子群是使得商群为 abel 群的最小子群。

不难发现上述几个例子都是在试图构造非平凡的正规子群, 从而通过做商发现新的结构。我们接下来回到正规子群本身

定义 1.3.4. $\forall x \in G, x^{-1}Hx$ 称为 H 的共轭

对于 $T := \{H \mid H < G\}$ 为所有子群构成的集合, 在这个集合中共轭即作为一种等价关系, 等价类中只有一个元素的即为正规子群。

1.4 单群

我们之前提到如果能够构造非平凡的正规子群, 我们就可以通过做商的方式使其变小, 进而研究其结构。但非平凡正规子群不总是存在, 而这类群就是我们要通过商群研究的最小单位, 即将有限群分类转化为有限单群分类, 这是现代代数学最辉煌的成果之一。

定义 1.4.1. 如果一个群 G 没有非平凡的正规子群, 则称 G 为单群。

有限单群有且仅有以下几种：

- p 为素数, \mathbb{Z}_p 为单群
- 交错群 $A_n (n \geq 3, n \neq 4)$ 为单群
- 李型单群 ($psL(n, q)(sL(n, q)/C(sL(n, q)))$)
- 26 个散在单群 (20 个摩群, 6 个孤狼)

后两种单群对现在的我们来说过于复杂, 我们来说明交错群 A_n 在 $n \neq 4$ 时为单群 $A_n \triangleleft S_n$

引理 1.4.1. (1) $S_n = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle = \langle (12), (12, \dots, n) \rangle$

(2) $A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle$

证明. 前者证明直接验证即可, 后者注意到 $(12i) = (1i) \circ (12), (1ij) = (1j) \circ (1i)$ 即可. \square

定理 1.4.1. $n \geq 3$, 则 A_n 为单群 $\Leftrightarrow n \neq 4$

证明. 依次证明 A_4 不是单群、 $A_n (n \neq 4, n \geq 3)$ 均是单群即可。

(一) $n = 4$ 时, A_4 不是单群

记 $a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)$, 令 $H = \{(1), a, b, c\}$ 为正规子群。

(二) $n \geq 5$ 时, A_n 为单群

设 $K \triangleleft A_n$ 且 $|K| \neq 1$, 希望证明 $K = A_n$

先证明: 若 K 中有一个三轮换 (rst) , 则 $K = A_n$

取一个 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(r) = 1, \sigma(s) = 2, \sigma(t) = i$

(1) 若 $\sigma \in A_n$, 则 $\sigma(rst)\sigma^{-1} = (12i) \in K$

(2) 若 $\sigma \notin A_n$, 则 σ 为奇置换, 则取 $\{u, v\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, 2, i\}$

此时令 $\tilde{\sigma} = (uv)\sigma \in A_n$

$$\tilde{\sigma}(rst)\tilde{\sigma}^{-1} = (12i) \in K$$

再说明： K 中必有一个三轮换

对 $\alpha \in K \subset A_n$ ，令

$$\eta(\alpha) := \alpha \text{ 不相交轮换分解中轮换因子最大长度}$$

则对 $\eta(\alpha)$ 做繁琐的讨论即可，具体可见书。

□

1.5 同态

定义 1.5.1. 设 G_1, G_2 为两个群， $f : G_1 \rightarrow G_2$ 为映射，如果 $\forall a, b \in G_1, f(ab) = f(a)f(b)$ ，则称 f 为群同态。若进一步为一一对应，则 f 为群同构，记 $G_1 \stackrel{f}{\cong} G_2$

上面对于同构的刻画 $\Leftrightarrow \exists$ 同态 $g : G_2 \rightarrow G_1$ 使得 $g \circ f = id_{G_1}, f \circ g = id_{G_2}$

命题 1.5.1. 对一般的同态，记 $Ker(f) := \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\} < G_1$ 为正规子群

我们相应地给出 $Im(f) := \{f(a) \mid a \in G_1\} < G_2$ ，一般不是 G_2 的子群。自然地有

$$f \text{ 为单同态} \Leftrightarrow Ker(f) = \{e_1\}, f \text{ 为满同态} \Leftrightarrow Im(f) = G_2$$

例 7. 设 G 为群， $Aut(G) := \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ 为同构}\}$ 为自同构构成的集合，也是一个群，称为自同构群。考虑 $\forall g \in G, \theta_g : G \rightarrow G, x \mapsto g^{-1}xg$ ，在不为 Abel 群时为非平凡自同构，称其为内自同构。其构成的集合

$$Inn(G) := \{\theta_g \mid g \in G\} < Aut(G)$$

引理 1.5.1. $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$

证明. 验证 $\forall f \in Aut(G), h \in Inn(G), h = \theta_g$ ，我们有 $f^{-1}hf = \theta_{f^{-1}(g)} \in Inn(G)$ 即可。□

定理 1.5.1 (群同构基本定理). $f : G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态，则 $Im(f) \cong G_1/Ker(f)$

证明. 直接构造对应关系 $\theta: G_1/Ker(f) \rightarrow G_2, aKer(f) \mapsto f(a)$, 验证其为一一对应的群同态即可。 \square

例 8. 循环群的结构: 一个循环群总同构于 \mathbb{Z} 或 \mathbb{Z}_m

证明. $G = \langle a \rangle$ 为任一循环群, 做映射

$$\theta: \mathbb{Z} \rightarrow G, m \mapsto a^m$$

其为满同态, 从而 $G \cong \mathbb{Z}/Ker(\theta)$, 讨论 $Ker(\theta)$ 即得。 \square

例 9. $\phi: G \rightarrow Inn(G), g \mapsto \theta_{g^{-1}}$ 为群同态, 从而 $Inn(G) \cong G/Ker(\phi)$, 注意 $Ker(\phi) = C(G)$, 故

$$Inn(G) \cong G/C(G)$$

定理 1.5.2 (子群对应定理). G 为群, $H \triangleleft G, j: G \rightarrow G/H$ 为满同态, 则下列两个集合一一对应:

$$\Gamma_1 := \{H_1 \mid H_1 < G, H \subset H_1\}, \Gamma_2 := \{\tilde{H}_2 \mid H_2 < G/H\}$$

证明. 构造映射

$$\begin{aligned} \phi: H_1 &\mapsto \{h_1H \mid h_1 \in H_1\} \\ \psi: \tilde{H}_2 &\mapsto j^{-1}(\tilde{H}_2) = \{x \in G \mid j(x) \in \tilde{H}_2\} \end{aligned}$$

验证两者的复合分别为恒同映射即可 \square

定理 1.5.3 (第一同构定理). G 为群, $H \triangleleft G, N \triangleleft G, N < H$, 则 $G/H \cong (G/N)/(H/N)$

注 1.5.1. 这其实是在说可以在商群两边同时约掉公共的因子得到而保证同构。

定理 1.5.4 (第二同构定理). G 为群, $H \triangleleft G, K < G$, 则 $HK < G, H \triangleleft HK, H \cap K \triangleleft K$, 且 $HK/H \cong K/H \cap K$

例 10. 考虑 $Aut(\mathbb{Z}_m)_{m \geq 0}, Aut(\mathbb{Z})$

(1) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle, Aut(\mathbb{Z})\{id_{\mathbb{Z}}, \sigma\}$, 其中 $\sigma: n \mapsto -n$

(2) $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$, 自同构 σ 由 $\sigma(a) = a^l$ 唯一决定, $o(\sigma(a)) = m$ 指出 $(l, m) = 1$ 即可, 于是给出

$$Aut(G) \cong \mathbb{Z}_m^* := \{0 < l < m \mid (l, m) = 1\}$$

1.6 群的直积

定义 1.6.1. $G = G_1 \times \cdots \times G_n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \forall i, x_i \in G_i\}$, 称 G 为 G_1, \cdots, G_n 的外直积群, 群上的运算由其分量诱导。

我们希望通过某种方式将 G_i 嵌入到 G 中作为子群以研究其性质, 自然有嵌入同态和对应的投影同态

$$j_i : G_i \rightarrow G, x \mapsto (e_1, e_2, \cdots, x, \cdots, e_n)$$

$$p_i : G \rightarrow G_i, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

于是结合外直积的性质我们立刻有

- (1) $\forall i, p_i$ 满同态, j_i 单同态, 且 $p_i \circ j_i = id_{G_i}$
- (2) 记 $H_i := j_i(G_i) < G$, 则 $\forall i \neq j, x \in H_i, x \in H_j$, 我们有 $xy = yx$
- (3) $G = H_1 H_2 \cdots H_n$ 且 $\forall i, H_i \triangleleft G$
- (4) $\forall i, H_i \cap H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n = \{e_G\}$
- (5) 根据 (4) 不难得到对于将 G 表示为 H_i 中元素之积的方式唯一

我们由此给出内直积的定义

定义 1.6.2. G 为群, H_1, \cdots, H_n 为 G 正规子群, 满足 $G = H_1 H_2 \cdots H_n$, 且 $\forall i, H_i \cap H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n = \{e_G\}$, 则称 G 为 H_1, \cdots, H_n 的内直积。

我们很自然地把两者联系在一起

定理 1.6.1. G_1, \cdots, G_n 为群, 则

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_n \Leftrightarrow \forall i, \exists H_i \triangleleft G \text{ 使得 } H_i \cong G_i \text{ 且 } G \text{ 为 } H_1, \cdots, H_n \text{ 内直积}$$