几何拓扑选讲笔记

卓功亦

2025 年 9 月 18 日

课本

- 《基础拓扑学讲义》尤承业–同伦、覆叠空间
- 《微分几何》彭家贵、陈卿–曲线、曲面（Gauss-Bonet 公式）

1 同伦

1.1 同伦的概念

在上学期的最后，我们给出了闭曲线分类定理的简单证明，但我们忽略了其中一个问题，即如何论证 $S^2 \not\cong T^2$，将这个问题推而广之，实际上是在询问拓扑中一个基本的问题，即如何判定两个空间是否同胚？能不能找到一种拓扑不变量来刻画一些空间？于是，在这一章中，我们引入了拓扑中的基本工具之一–同伦

定义 1.1.1. 有两个拓扑空间 X, Y，及两个连续映射 $f, g : X \to Y$ 称 f, g **同伦**如果

$$\exists H : X \times I \to Y, I = [0,1], H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$$

其中 H 为连续映射，记作 $H : f \simeq g$ 或 $f \overset{H}{\simeq} g$

注 1.1.1. 这其实是在说 f 可以连续地变化为 g

在这个连续变化的过程中，固定时间 t，$h_t(x)$ 为一个连续映射，称为 H 的 $t-$ 切片。我们接下来来看一些简单的例子，以加深对同伦的理解。

例 1. 考虑任意拓扑空间 X 到欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 的两个连续映射 f, g，我们来说明这两个连续映射必同伦。

直接构造即可，令 $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$，则显然为连续映射，且 $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$，这事实上说明了任意拓扑空间到欧氏空间的两个连续映射必同伦。

例 2. 再看到从任意拓扑空间到单位圆周上的连续映射 f, g

一个简单的思路是在之前构造的基础上做 normalization 以统一其模长，从而得到结果，但需要注意的是如果之前连续变化的直线经过原点，就会导致该函数无意义。这也就是说若有 $f(x) \neq g(x) \forall x \in X$ ，则取

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\| (1-t)f(x) + tg(x) \|}$$

即得两者同伦，而存在 x 使得 $f(x) = g(x)$ 时情况要复杂的多，在之后再讨论。

同伦的一个良好性质在于其与函数复合的互动：

引理 1.1.1. *若 $f_1 \simeq f_2$，g 为连续函数，则*

$$f_1 \circ g \simeq f_2 \circ g, g \circ f_1 \simeq g \circ f_2$$

证明. 设 $H : f_1 \simeq f_2$，则令

$$H_1(x,t) = H(g(x),t), H_2 = g \circ H$$

接下来说明

$$H_1 : f_1 \circ g \simeq f_2 \circ g, H_2 : g \circ f_1 \simeq g \circ f_2$$

对 H_1，连续是显然的，而 $H_1(x,0) = f_1 \circ g(x), H_1(x,1) = f_2 \circ g(x)$，成立

对 H_2，连续同样显然，且 $H_2(x,0) = g \circ H(x,0) = g \circ f_1, H_2(x,1) = g \circ H(x,1) = g \circ f_2$，成立，引理得证。 □

同伦的另一个良好性质就在于它本身是一个等价关系，从而将两拓扑空间 X, Y 间的连续映射全体 $C(X,Y)$ 划分为若干同伦等价类。

命题 1.1.1. 同伦是一个等价关系

证明. 直接验证即可

- 自反性：令 $H(x,t)=f(x)\forall x\in X$，显然 $f\simeq f$ 这被称为**常同伦**
- 对称性：令 $H: f\simeq g$，则考虑 $H'(x,t)=H(x,1-t)$，显然满足条件，H' 称为 H 的逆
- 传递性：若 $f\overset{H_1}{\simeq} g\overset{H_2}{\simeq} k$，则令

$$H(x,t)=\begin{cases}H_1(x,2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}\\ H_2(x,2t-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

□

我们刚刚证明了同伦本身是等价关系，这一等价关系诱导出的等价类自然是我们研究的对象，记

$$[X,Y]=C(X,Y)/\simeq$$

称一个映射**零伦**，如果其同伦于常值映射。取 Y 为欧氏空间的凸子集或同胚于凸集的集合，任意拓扑空间到 Y 的连续映射都是零伦的。（前者直接使用之前给出的 H 即可，后者利用同胚带来的连续一一映射即可）。

接下来引入相对同伦的概念，简单来说，相对同伦就是在同伦的基础上附加一些条件，从而让同伦的结构更加清晰。

定义 1.1.2. 在 $f\simeq g$ 的基础上，如果有

$$A\subset X, f(a)=g(a)\forall a\in A, H(a,t)=f(a)\forall a\in A, t\in I$$

则称其为关于 A 相对同伦，记作 $f\simeq g\mathbf{rel}A$，不难验证相对于 A 的同伦也是等价关系。

我们更近一步，研究一种更特殊的相对同伦。

定义 1.1.3. $A=\{0,1\}$ 时的相对同伦即 $f\simeq g\mathbf{rel}\{0,1\}$，称为**定端同伦**，记作 $f\dot{\simeq} g$

自然地，定端同伦是等价关系，从而会形成 x 到 y 道路的等价类。如果进一步地有 $f(0)=f(1)=x$，即该道路本身是一个“圈”，这就引入了基本群的概念：

$$\pi_1(X,x)=\{f:I\to Xf(0)=f(1)=x\}/\simeq rel0,1$$

这个群（当然我们还没有验证它是一个群）大部分时候不交换

1.2 同伦等价和形变收缩

在之前空间间映射的同伦的基础上，我们给出两空间的同伦等价：

定义 1.2.1. 称两空间 X,Y **同伦等价**（记作 $X\simeq Y$），如果存在两个连续映射 f,g 使得

$$g\circ f\simeq id_X, f\circ g\simeq id_Y$$

我们有时把 g 称为 f 的同伦逆

自然我们有

命题 1.2.1. *同伦等价是一个等价关系*

下面给出同伦等价最核心的性质，即我们如何能够用同伦等价简化问题

命题 1.2.2. *若 $X'\simeq X, Y'\simeq Y$，则 $[X,Y]\cong[X',Y']$*

证明. 如图所示同伦等价诱导了 $C(X,Y)\leftrightarrow C(X',Y')$ 的双向映射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Y & X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "f'"] \\ X' \arrow[r, "h'"] & Y' \arrow[u, "g'"'] & X' \arrow[r, "h'"] \arrow[u, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$

也即

$$H_1: C(X,Y)\to C(X',Y'), h\mapsto f'\circ h\circ g$$

$$H_2: C(X',Y')\to C(X,Y), h'\mapsto g'\circ h'\circ f$$

考虑它们在 $[X,Y]\leftrightarrow[X',Y']$ 上诱导的映射，记作 H_1,H_2，先来说明两映射良定，即任两个同伦的映射 $h_1,h_2(h_1',h_2')$ 被 $H_1(H_2)$ 映为同伦映射

只需使用引理 1.1.1 即可，进而对双射和互为逆的证明同样用该引理即可简单得到。

□

根据之前的讨论，我们显然有 $\mathbb{E}^n\simeq\{0\}$，空间间的同伦等价在一些时候可以大大简化问题

定义 1.2.2. 对 X 与其拓扑子空间 A，若有

$$A\underset{r}{\overset{i}{\leftrightarrows}}X, r\circ i=id_A, i\circ r\simeq id_X$$

则称 A 为 X 的形变收缩核

例 3. S^1 为 $\mathbb{E}^2\setminus\{0\}$ 的形变收缩核

令 $i=\frac{x}{\|x\|}$，r 为嵌入映射即可。

定义 1.2.3. 在定义 1.2.2 的基础上，如果有 $H(a,t)=a\forall a\in A$ 则称其为强形变收缩核

不难发现，强形变收缩核是一个与相对同伦对应的概念。下面我们给出一个例子来说明形变收缩核不一定强形变收缩

例 4. 考虑一个“梳子”：$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\text{是有理数或}y=0\}$ 为 $\mathbb{E}^2$ 的子空间，其收缩到 $x=0$ 形变收缩核而不是强形变收缩核

首先说明其是形变收缩核。

基本的思路是分段，$0-\frac{1}{3}$ 时全部向下到 x 轴，$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ 时全部向左到原点，最后 $\frac{2}{3}-1$ 回到原先的位置，也即

$$H((x,y),t)=\begin{cases}(x,(1-3t)y) & 0\le t\le\frac{1}{3}\\((2-3t)x,0) & \frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\\(0,(3t-2)y) & \frac{2}{3}\le t\le 1\end{cases}$$

其次说明其不是强形变收缩核

反证：如果是强形变收缩核，则存在同伦 H 满足

$$H(x,0)=x,H(x,1)\in Y$$

$$H(x,t)=x\forall x\in Y,t\in[0,1]$$

考虑 Y 上一点 $(0,y_0)$ 及其与 x 轴不交的开邻域 V，根据 H 在 $((0,y_0),t)$ 处的连续性，V 的原像为开集，从而有包含 $((0,y_0),t)$ 的开邻域 $(U_t,(t-\delta_t,t+\delta_t))$ 在其原像中，即

$$f(U_t\times(t-\delta_t,t+\delta_t))\subset V$$

而注意 $[0,1]$ 为紧集，且 $\{(t-\delta_t,t+\delta_t)\}$ 为开覆盖，从而有有限子覆盖

$$[0,1]\subset\bigcup_{i=1}^{n}(t_i-\delta_{t_i},t_i+\delta_{t_i})$$

于是我们有

$$f(\bigcap_{i=1}^{n}U_{t_i}\times[0,1])\subset V$$

注意 $(0,y_0)\in U_{t_i}$ 且 $\bigcap_{i=1}^{n}U_{t_i}$ 为有限开邻域的交从而是开的，故有 $(x_1,y_1)\in\bigcap_{i=1}^{n}U_{t_i},x_1\neq0$，根据之前的结论，$H((x_1,y_1),t)$ 始终在 V 中，但其连续运动到 Y 上必须经过点 $(0,y_1)$，矛盾！

命题 1.2.3. *$f:X\to Y$ 为商映射，$A\subset X,B=f(A)$ 若 H 为 X 到 A 的（强）形变收缩，且当 $x\overset{f}{\sim}x',H(x,t)\overset{f}{\sim}H(x',t)\forall t\in I$，则存在 Y 到 B 的（强）形变收缩*

证明. 对应交换图如图所示

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H"] & Y \arrow[d, "H'"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

因此自然考虑上述交换图诱导的映射 $H'(f(x),t)=f(H(x,t))$，先说明其良定性，再来验证其是（强）形变收缩

首先说明良定，若对 $x,x'\in X$ 有 $f(x)=f(x')$，则根据条件 $H(x,t)\overset{f}{\sim}H(x',t)$，从而 $f(H(x,t))=f(H(x',t))$，良定性成立

（强）形变收缩方面起点终点与 H 一一对应，连续性受商映射本身性质保证，于是得到结论。 □

定义 1.2.4. 称拓扑空间 X 为可缩空间，如果 $X\simeq\{0\}$

2　基本群的构造和性质

2.1　道路类

定义 2.1.1. 称 a 为从 x_0 到 x_1 的一条道路如果 $I \xrightarrow{a} X$ 为连续映射，且起点终点为 x_0, x_1

我们考虑道路间的运算，乘法是道路的拼接

$$\overline{a}(t) = a(1-t)$$

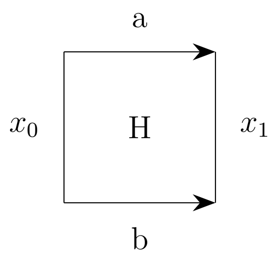
$$ab(t) = \begin{cases} a(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

这种运算是自然的，但有一个致命的问题：这种乘法不是结合的。于是我们尝试通过同伦的工具引入道路类的概念来解决这一问题

命题 2.1.1. *(1)* $a \underset{\cdot}{\simeq} b \Rightarrow \overline{a} \underset{\cdot}{\simeq} \overline{b}$

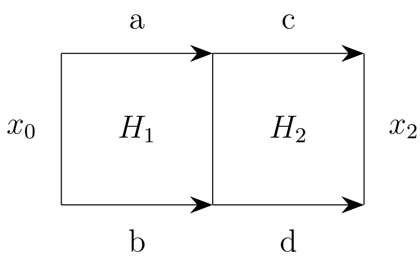
(2) $a \underset{\cdot}{\simeq} b, c \underset{\cdot}{\simeq} d \Rightarrow ac \underset{\cdot}{\simeq} bd$

证明. (1) 是简单的，我们通过画图来给 (2) 一个不严谨的说明，这种说明相当直观，从而可以很好地给我们带来直觉上的理解。具体的构造在这之后是简单的（其实就是拼接而已）



如图，a, b 代表两条道路，竖直线代表其同伦函数随时间变化的结果，这一

图像带给我们对同伦直观感觉，我们接着来做这里的内容：

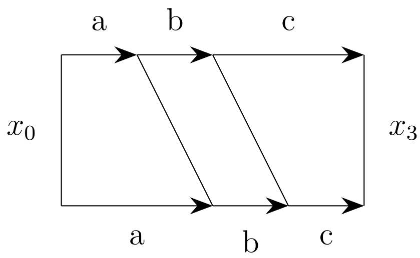


如图，很直观地体现出了两条道路拼接之后如何同伦的。 □

上面给出的几条性质已经足够我们来构造道路类和其上的运算了。所谓道路类就是和一条道路定端同伦的所有道路构成集合，也即考虑道路集合商掉定端同伦后得到的商集。自然地，命题 2.1.1 保证了道路类乘积和逆的良定性。我们现在可以保证这一运算的结合性了

命题 2.1.2. *对道路类* α, β, γ，*有* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

证明. 还是通过命题 1.3.1 中同样的图来给出直观：取 a,b,c 为 α, β, γ 代表元



很明显地我们可以显式地构造这个同伦。但我们接下来引入一种在之后的讨论中更加普遍的做法（即将拼接这件事推广、严格化）来严格地说明这件事

我们将原命题转化到 $I \to I$ 映射间的同伦，具体来说，我们取 f, g 使得 $(ab)c \circ f = a(bc) \circ g = abc$，其中 abc 为三条道路拼接（即 $\frac{1}{3}$ 走完一段，这实际上就是调整道路行进的“速度”）则我们要证明 $(ab)c \simeq a(bc)$ 只需证明 $f \simeq g$，而这一点由 I 为 $\mathbb{E}$ 中凸集成立。 □

2.2 基本群的构造

接下来来构造基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 首先构造其幺元，自然地有 $e_{x_0}: I \to X, e_{x_0}(t) = x_0$，接下来说明逆元：

命题 2.2.1. $\alpha\alpha^{-1} =< e_{x_0} >$，其中 $\alpha^{-1} :=< \overline{a} >, < a >= \alpha$

证明. 再熟悉一下之前给出的方法，记 $e_0 : I \to I, x \mapsto x_0$，则 $e_{x_0} = a \circ e_0$，而

$$a = a \circ id_I, \overline{a} = a \circ \overline{id_I}$$

命题转化为证明 $id_I\overline{id_I} \underset{\cdot}{\simeq} e_0$，这是显然的。 □

定义 2.2.1. 基本群 $\pi_1(X, x_0) := \{X$ 中起点终点均为 x_0 的道路类$\}$

我们在之前的铺垫中已经完全建立了基本群的群结构，接下来我们来考察基本群与基本群间的群同态是什么

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_\pi} \pi_1(Y, f(x_0))$$

可以发现这个从基本群到基本群的群同态应该可以由道路类间的映射所推广得到，我们来考察这样的映射要满足什么

$f : X \to Y$ 给出了两空间间的映射，希望能够有其诱导出的道路类间的映射 f_π，这需要保证

$$a_1 \underset{\cdot}{\simeq} a_2 \Rightarrow f \circ a_1 \underset{\cdot}{\simeq} f \circ a_2$$

这其实只需要 f 连续即可。此时我们取 $f_\pi(< a >) =< f \circ a >$ 即可得到道路类间的映射。且这样得到的群同态满足

$$g_\pi \circ f_\pi = (g \circ f)_\pi$$

例 5. $D^2 \to D^2$ 间没有不动点的连续映射

反证：如果有连续映射 $f : D^2 \to D^2$ 没有不动点，则考虑 $r : D^2 \to S^2$ 将 D^2 上点 x 映为 $f(x), x$ 构成射线与 S^2 交点，这自然是一个连续映射。则考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id"'] & D^2 \arrow[d, "r"] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

则由之前的讨论得到 $id_\pi = r_\pi \circ i_\pi$

而 S^2 基本群同构于 $\mathbb{Z}$，D^2 同构于 $\{0\}$（这里 S^1 的基本群将在之后严格证明），不存在这样的群同态

接下来的定理是重要的，它进一步深化了 f_π 的性质

定理 2.2.1. $f : X \to Y$ 为同胚，则 f_π 为群同构

证明. 事实上就是同胚及其逆映射分别构造了一个群同态，从而是群同构。 □

注 2.2.1. 上述定理中同胚变为同伦等价也是对的

我们接下来的工作是解决上学期闭曲面分类的遗留问题:S^2, T^2, nT^2, mP^2 这些闭曲面为什么不同胚？

注 2.2.2. 这里有必要解释一下为什么基本群可以代表整个空间，或者说，一些什么样的空间的基本群可以不受基点选取的影响。也即我们考虑基点的变换 $\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_1)$，注意当 x_0, x_1 道路连通时：假设从 x_0 到 x_1 道路为 ω，则考虑道路类间映射

$$\alpha \mapsto <\omega>^{-1} \alpha <\omega>$$

这个映射的形式我们非常熟悉，可以看作某种意义上的坐标变换，记作

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\omega_\star} \pi_1(X, x_1)$$

注意到 $\omega_\star$ 保乘法，从而为群同态，且对 ω 的逆 ϖ 同样可以构造群同态 $\varpi_\star$，结合之前结论得到群同态事实上是群同构，也即若 X 道路连通，则 $\pi_1(X, x_0)$ 与基点选取无关，记作 $\pi_1(X)$

因此我们在计算过程中也可以自由选择基点计算其基本群。

2.3 简单基本群的计算

可缩空间的结构是简单的，若 X 可缩则 $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$

接下来我们来考虑另一基本空间 S^1 上的基本群，我们将 S^1 放在复平面上考虑，取 $z_0 = 1$ 为基点，来严格地证明

定理 2.3.1. $\pi_1(S^1,z_0)\cong\mathbb{Z}$

证明. 核心思路是做道路类与其走过的圈数间的对应，一个自然的思路是将 $\mathbb{E}^1$“卷”到 S^1 上，从而将 S^1 上道路 a 打到 $\mathbb{E}^1$ 上道路 $\tilde{a}$ 后进行讨论

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{a}"] \arrow[dr, "a"'] & \mathbb{E}^1 \arrow[d, "p"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

其中 $p:t\mapsto e^{2\pi it}$

命题 2.3.1. *$\tilde{a}$ 的存在且唯一*

证明. 先来证明存在性，从一个引理开始

引理 2.3.1. *若 $f:X\to S^1$ 不满，则存在 $\tilde{f}$ 使得 $p\circ\tilde{f}=f$*

证明. 不妨 $x=e^{2\pi it}$ 不在 f 原像中，则考虑

$$p^{-1}:S^1\to(t,t+1),e^{2\pi im}\mapsto m$$

令 $\tilde{f}=p^{-1}\circ f$，满足要求。 □

在这个引理的帮助下我们来证明存在性，基本的想法是通过切割满足引理中的条件，使用引理后将得到的结果拼接在一起即可将其切割为 n 段，第 i 段为 $I_i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ 使得 $a\mid_{I_i}$ 不为满射。这是因为可以将 S^1 用不超过半圆的开集覆盖，其原像为 I 中开覆盖，而紧致度量空间中有 lebesgue 数（即存在 δ 使得 $\forall x,B_\delta(x)$ 总在某个开集中），从而只要 n 足够大即可保证均不为满射。于是由引理得到存在 a_i 使得

$$p\circ a_i=a\mid_{I_i}$$

考虑相邻两段 a_i,a_{i+1}，我们有

$$a_{i+1}(\frac{i}{n})-a_i(\frac{i}{n})=t\in\mathbb{Z}$$

令 $a'_{i+1}=a_{i+1}-t$ 即可拼接。依次这样做，再将初始值变为 0 即得到 $\tilde{a}$ 满足

$$\tilde{a}(0)=0,\tilde{a}(1)\in\mathbb{Z}$$

唯一性方面，若 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 均满足，考虑 $\tilde{a}-\tilde{b}$，首先由道路的连续性到得其仍为连续函数，其次有 $p \circ (\tilde{a}-\tilde{b}) = 1$，即 $\tilde{a}-\tilde{b}$ 只能取整数，于是其相差特定的整数，结合 $\tilde{a}(0) = 0$ 即得唯一性。

综上这样的 $\tilde{a}$ 存在且唯一。 □

上述 $a \mapsto \tilde{a}$ 给出了道路到整数的构造 $a \mapsto q(a)$，其中 $q(a)$ 为 $\tilde{a}$ 的终点。接下来我们需要论证

$$a \underset{\cdot}{\simeq} b \Leftrightarrow q(a) = q(b)$$

先证明 $a \underset{\cdot}{\simeq} b \Rightarrow q(a) = q(b)$

引理 2.3.2. $a(t) \neq -b(t) \Rightarrow q(a) = q(b)$

证明. 考虑 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 即可

$$a(t) \neq b(t) \Rightarrow |\tilde{a}(t) - \tilde{b}(t)| \leq \frac{1}{2}$$

故 $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$，即 $q(a) = q(b)$ □

回到原题，同伦 $H : I \times I \to S^1$，我们的基本思路是取许多时间点上的切片，保证相邻的切片足够接近使其在 q 下相等，也即记 h_t 为 H 的 t-切片，则希望取 δ 使得 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时有

$$\forall s \in I, h_{t_1}(s) \neq -h_{t_2}(s)$$

这件事由 H 的一致连续性保证，于是得到 $a \underset{\cdot}{\simeq} b \Rightarrow q(a) = q(b)$

另一方面，若 $q(a) = q(b)$，同样考虑 $\tilde{a}-\tilde{b}$，由圈数相等，其起点终点均为 0，利用 $\mathbb{E}^1$ 可缩即得 $\tilde{a}-\tilde{b} \underset{\cdot}{\simeq} 0$ 于是 $a \underset{\cdot}{\simeq} b$

最后只需证明我们的映射是满射即可，直接通过构造 $a_n : t \mapsto e^{2\pi i n t}$ 即可。综上

$$q : \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

得到 S^1 的基本群同构于 $\mathbb{Z}$ □